

Roll No.....

(153)

4071

Printed Pages—4+1]

5B.Sc.(IT)5

Bachelor of Science (IT) (Fifth Semester)

Examination, May/June 2019

MATHEMATICAL ANALYSIS

अवधि/Duration : 3 घंटे/Hours]

[पूर्णांक/Max. Marks : 100

[न्यूनतम उत्तीर्णांक/Min. Pass Marks : 40

निर्देश :

1. प्रश्नपत्र **पाँच** इकाइयों में विभाजित है। प्रत्येक इकाई में आन्तरिक विकल्प दिया गया है।
2. प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए। इस प्रकार कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
3. **सभी** प्रश्नों के लिए समान अंक नियत हैं।
4. जहाँ आवश्यकता हो वहाँ उपयुक्त डाटा माना जा सकता है।
5. अनुवाद में विसंगति होने पर अंग्रेजी स्वरूप को सही माना जाये।
6. प्रश्नपत्र में परीक्षार्थी निर्धारित स्थान पर अपना रोल नम्बर अंकित करें।

Instructions :

1. The question paper is divided in *five* units. Each unit carries an internal choice.
2. Attempt *one* question from each unit. Thus attempt *five* questions in all.
3. *All* questions carry equal marks.
4. Assume suitable data wherever necessary.
5. English version should be deemed to be correct in case of any anomaly in translation.
6. Candidate should write his/her Roll Number at the prescribed space on the question paper.

P.T.O.

इकाई I/(Unit I)

1. (a) सिद्ध कीजिए : $\frac{1 + \cos\theta + i \sin\theta}{1 + \cos\theta - i \sin\theta} = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ 10

Prove that : $\frac{1 + \cos\theta + i \sin\theta}{1 + \cos\theta - i \sin\theta} = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(b) $\{S_n\}$ को monotonic sequence मानें, तब $\{S_n\}$ कनवर्जेन्ट है, यदि और केवल यदि यह bound हो जाता है। 10

Let $\{S_n\}$ be a monotonic sequence, then $\{S_n\}$ is convergent if and only if it is bounded.

अथवा/(Or)

2. (a) $6 + 8i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए। 10

Find square root of $6 + 8i$.

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक non-empty subset S of R जिसमें lower bound होता है, infinite infimum एकत्रित करता है। 10

Prove that every non-empty subset S of R which has a lower bound possesses an infinite infimum.

इकाई II/(Unit II)

3. (a) Maximum एवं Minimum मान ज्ञात कीजिए : 10

$$4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$$

Find the maximum and minimum value of $4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$

(b) Heine-Borel theorem को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए। 10

State and prove Heine-Borel theorem.

अथवा/(Or)

4. (a) 50 को दो भागों में इस प्रकार से विभाजित कीजिए जिससे कि पहले भाग के cube एवं दूसरे भाग के square का गुणनफल का मान अधिकतम हो। 10

Divide 50 into two parts such that the product of the cube of one and the square of the other shall be a maximum.

- (b) बोलजानो-वीरस्ट्रास प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए। 10
State and prove Bolzano-Weirstrass theorem.

इकाई III/(Unit III)

5. (a) टेलर की प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए। 10
State and prove Taylor's theorem.
- (b) यदि $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, तब सिद्ध कीजिए : 10
If $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{u}.$$

अथवा/(Or)

6. (a) $\log \sin (x + h)$ का प्रसार h की घात में टेलर प्रमेय के द्वारा कीजिए। 10
Expand $\log \sin (x + h)$ in power of h by Taylor's theorem.
- (b) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। 10
Prove that the function $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$.

इकाई IV/(Unit IV)

7. (a) अपर एवं लोअर रीमान समाकलन को फलन f के लिए Evaluate कीजिए जहाँ फलन $[0, 1]$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है : 10

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ जब, } x \text{ रेसनल है।}$$

$$= (1-x), \text{ जब, } x \text{ इर-रेसनल है।}$$

Evaluate the upper and lower Riemann integrals for the function f defined on $[0, 1]$ as follows :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ when } x \text{ is rational}$$

$$= (1-x), \text{ when } x \text{ is irrational}$$

- (b) सिद्ध कीजिए कि दो रीमान समाकलनीय फलनों का योग रीमान समाकलनीय होता है। 10
Prove that sum of two Riemann integrable functions is Riemann integrable.

अथवा/(Or)

8. (a) समाकलन के लिए Second mean value को लिखिए एवं इसके प्रयोग से दर्शाइए कि : 10

$$x > \log(1+x) > \frac{x}{1+x}, x > 0$$

State the second mean value theorem for integrals and apply to show that :

$$x > \log(1+x) > \frac{x}{1+x}, x > 0$$

- (b) सिद्ध कीजिए : 10

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), a, b > 0$$

Prove that :

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), a, b > 0$$

इकाई V/(Unit V)

9. (a) फलन $f(x)$ के लिए अन्तराल $(-\pi, \pi)$ पर फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए, जहाँ : 10

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ \sin x & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of the function $f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$, where

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi < x < 0 \\ \sin x & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

- (b) सिद्ध कीजिए कि $f(x, y)$ continuous है पर अवकलनीय नहीं है, अन्तराल $(0, 0)$ के लिए, जहाँ : 10

Show that $f(x, y)$ is continuous but not differentiable at $(0, 0)$, where :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Let } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

अथवा/(Or)

10. (a) दर्शाइए कि फलन $f(x, y) = \sin x + \cos y$ सर्वत्र अवकलनीय है। 10

Show that the function $f(x, y) = \sin x + \cos y$ is differentiable everywhere.

- (b) $f(x) = x$ के लिए फोरियर श्रेणी $0 < x < 2\pi$ अंतराल के लिए प्राप्त कीजिए। 10

Obtain the Fourier series representing the function $f(x) = x$ in the interval $0 < x < 2\pi$.