Roll No. ....

(134) **4071**

Printed Pages—**4+1**] **5B.Sc.(IT)5**

Bachelor of Science (Information Technology)

(Fifth Semester) Examination, Dec. 2018/Jan. 2019

MATHEMATICAL ANALYSIS

अवधि/Duration : 3 घंटे/Hours] [पूर्णांक/Max. Marks : 100

[न्यूनतम उत्तीर्णांक/Min. Pass Marks : 40

निर्देश :

1. प्रश्न-पत्र पाँच इकाइयों में विभाजित है । प्रत्येक इकाई में आन्तरिक विकल्प दिया गया है ।
2. प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न का उत्तर दीजिए । इस प्रकार कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. **सभी** प्रश्नों के लिए समान अंक नियत हैं ।
4. जहाँ आवश्यकता हो वहाँ उपयुक्त डाटा माना जा सकता है ।
5. अनुवाद में विसंगति होने पर अंग्रेजी स्वरूप को सही माना जाए ।
6. प्रश्न-पत्र में परीक्षार्थी निर्धारित स्थान पर अपना रोल नम्बर अंकित करें ।

Instructions :

1. The Question Paper is divided in five Units. Each unit carries an internal choice.
2. Attempt *one* question from each Unit. Thus attempt *five* questions in all.
3. *All* questions carry equal marks.
4. Assume suitable data wherever necessary.
5. English version should be deemed to be correct in case of any anomaly in translation.
6. Candidate should write his/her Roll Number at the prescribed space on the question paper.

P.T.O.

इकाई I (Unit I)

1. (a) प्रत्येक वास्तविक $x > 0$ तथा प्रत्येक पूर्णांक $n > 0$ के लिए केवल और केवल एक वास्तविक y इस प्रकार है $y^n = x$.

For every real $x > 0$ and every integer $n > 0$ there is one and only one real y such that $y^n = x$.

(b) माना कि z एवं w सम्मिश्र संख्या हैं तब :

Let z and w be complex number then :

(i) $|z| > 0$ unless $z = 0$, $|0| = 0$.

(ii) $|z^{-}| = |z|$

(iii) $|zw| = |z||w|$

(iv) $|\text{Re}z| \leq |z|$

(v) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

अथवा (*Or*)

2. (a) यदि m, n, p, q पूर्णांक $n > 0$, $q > 0$ तथा $r = m/n = p/q$ तो सिद्ध कीजिए :

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/p}.$$

अतः विवेचना कीजिए :

$$b^r = (b^m)^{1/n}.$$

If m, n, p, q are integer $n > 0$, $q > 0$ and $r = m/n = p/q$, prove that :

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/p}.$$

Hence, it make sence to define :

$$b^r = (b^m)^{1/n}.$$

(b) यदि $z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_n$ सम्मिश्र हैं, तो सिद्ध कीजिए :

If $z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_n$ are complex, prove that :

$|z_1 + z_2 + \ldots\ldots\ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots\ldots\ldots + |z_n|$.

इकाई II (Unit II)

3. (*a*) यदि X मेट्रिक स्पेस है तथा ECX, तो :

If X is a metric space and ECX then :

(*i*) E^- is closed.

(*ii*) $E = E^-$ if and only if E is closed.

(*iii*) E^-CF for every closed set FCX such that ECF.

(*b*) बोल्जानो-वायस्ट्रास सिद्धांत का कथन कीजिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Bolzano-Weierstrass theorem.

अथवा (*Or*)

4. (*a*) माना कि $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ सम्मिश्र क्रम हैं तथा $\lim_{n \to \infty} s_n = s$, $\lim_{n \to \infty} t_n = t$, तब :

Suppose $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ are complex sequence and $\lim_{n \to \infty} s_n = s$, $\lim_{n \to \infty} t_n = t$, then :

(*i*) $\lim_{n \to \infty} \left(s_n + t_n\right) = s + t$

(*ii*) $\lim_{n \to \infty} 1/s_n = 1/s$, provided $s_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ and $s \neq 0$.

(*b*) सिद्ध कीजिए :

Prove that :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + 1/n\right)^n = e.$$

इकाई III (Unit III)

5. (*a*) मेट्रिक स्पेस Y में मेट्रिक स्पेस X के लिए एक मैपिंग X पर संतत है। यदि और केवल यदि प्रत्येक ओपन सेट Y में V के लिए $p^{-i}(V)$ खुला हुआ है।

A mapping for a metric space X into a metric space Y is continuous on X if and only if $p^{-i}(V)$ is open in X for every open set V in Y.

(*b*) $x^3y^2(1 - x - y)$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and minimum values of $x^3y^2(1 - x - y)$.

अथवा (*Or*)

6. (*a*) सिद्ध कीजिए कि $\sum 1/n^p$ अभिसरित होता है यदि $p > 1$ तथा अपसारित होता है यदि $p \le 1$.

Prove that $\sum 1/n^p$ converges if $p > 1$ and diverges if $p \le 1$.

(*b*) श्रेणी $\sum a_n$

(*i*) अभिसरित होती है यदि $\lim\limits_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$

(*ii*) अपसरित होती है यदि $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$ for $n \ge n_0$ where number is same fixed inters.

The series $\sum a_n$

(*i*) converges if $\lim\limits_{n \to \infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$

(*ii*) diverges if $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$ for $n \ge n_0$ where number is same fixed inters.

इकाई IV (Unit IV)

7. (*a*) यदि $U = \sin 2x/\cosh 2y + \cos 2x$, तो संगत वैश्लेषिक फलन ज्ञात कीजिए।

If $U = \sin 2x/\cosh 2y + \cos 2x$, find the corresponding analytic function.

(*b*) यदि $[a, b]$ पर f एक वास्तविक संतत फलन है जो (a, b) में differentiable है, तो एक बिन्दु $x \in (a, b)$ है जिस पर :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x).$$

If f is a real continuous function on $[a, b]$ which is differentiable in (a, b), then there is a point $x \in (a, b)$ at which :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x).$$

अथवा (*Or*)

8. (*a*) यदि f तथा g, $[a, b]$ पर संतत वास्तविक फलन है जो (a, b) में अवकलनीय हैं, तो एक बिन्दु $x \in (a, b)$ है जिस पर :

$$[f(b) - f(a)]\ g'(x) = [g(b) - g(a)]\ f'(x).$$

If f and g are continuous real function on $[a, b]$ which are differentiable in (a, b), then there is a point $x \in (a, b)$ at which :

$$[f(b) - f(a)]\ g'(x) = [g(b) - g(a)]\ f'(x).$$

(*b*) वैश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ यदि $v = \log(x^2 + y^2) + x - 2y$ का निर्धारण कीजिए।

Determine the analytic function :

$$f(z) = u + iv, \text{ if } v = \log(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

इकाई V (Unit V)

9. (*a*) यदि $[a, b]$ पर $f \in R(\alpha)$ तथा $g \in R(\alpha)$, तो :

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha.$$

If $f \in R(\alpha)$ and $g \in R(\alpha)$ on $[a, b]$, then :

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha.$$

(*b*) $-\pi < x < \pi$ के अंतराल में फूरिये श्रेणी $f(x) = e^x$ प्राप्त कीजिए।

Obtain the fourier series for $f(x) = e^x$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

अथवा (*Or*)

10. (*a*) यदि $[a, b]$ पर r' संतत है तो r संशोधनीय है तथा

$$\Delta(r) = \int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

If r' is continuous on $[a, b]$, then r is rectifiable and

$$\Delta(r) = \int_a^b |r'(t)| \, dt.$$

(*b*) $x = -\pi$ to $x = \pi$ से $x - x^2$ प्रदर्शित करने के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए। $1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \ldots\ldots\ldots = \pi^2/12$ को भी निगमित कीजिए।

Find a fourier series to represent $x - x^2$ from $x = -\pi$ to $x = \pi$. Also deduce $1/1^2 - 1/2^2 + 1/3^2 - 1/4^2 + \ldots\ldots\ldots = \pi^2/12$.